Dérivabilité

Dans tout ce chapitre, $I, J\dots$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Quand on emploiera les notations $[a,b]$ ou $]a,b[$, il sera sous-entendu que a et b sont deux réels et que $a<b$.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définitions

1.1.1 Dérivabilité en un point

Définition (Dérivabilité en un point) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$. On dit que f est *dérivable en a* si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en a* et notée $f'(a)$; on la note parfois $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\square}(a)$ quand le symbole utilisé pour désigner la variable de f est $\square$, ou encore $\mathrm{D}f(a)$.
Cette définition de la dérivabilité en a est équivalente à la suivante :

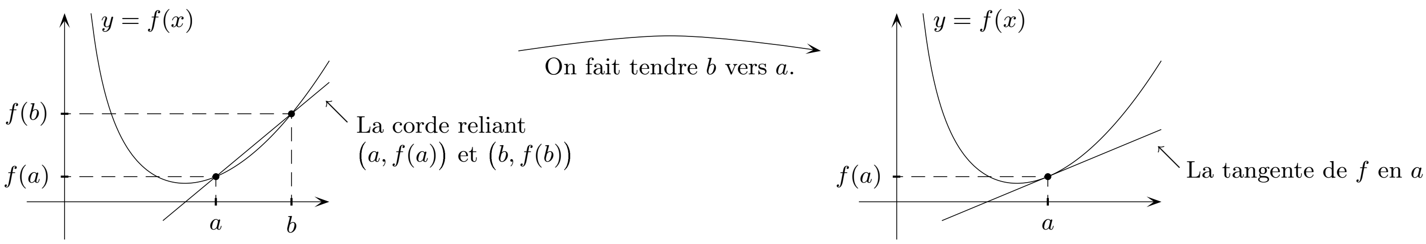
$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \lambda(x-a) + o(x-a) \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}\text{, qui se trouve alors être égal à } f'(a).$$

Théorème (La dérivabilité implique la continuité) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

✖✖✖ **Attention !** La réciproque est totalement fausse. Pensez à la fonction valeur absolue en 0. C'est contre-intuitif, mais il existe même des fonctions qui sont continues sur tout $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point.

Démonstration Puisque f est dérivable en a, alors : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$. En particulier, puisque $x-a \underset{x\to a}{=} o(1)$, on a : $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1)$, et donc f est bien continue en a. ■

✌✌✌ **Explication** La dérivabilité de f en a signifie l'existence d'un réel λ pour lequel $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+\lambda(x-a)+o(x-a)$. Une telle égalité exprime une approximation affine de f au voisinage de a : elle nous dit que la droite d'équation $y = f(a)+\lambda(x-a)$ est la droite la plus proche du graphe de f au voisinage de a, dite *tangente de f en a*. En particulier, cette terminologie explique pourquoi on dit que $\lambda = f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a.
Sachant que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la corde reliant les points de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$, la limite $f'(a) = \lim\limits_{b\to a} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, quand elle existe et est finie, représente la « pente limite » des cordes précitées.



Définition (Tangente) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- Si f est dérivable en a, la droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée la *tangente de f en a*.
- Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, la droite d'équation $x=a$ est appelée la *tangente de f en a*.

Explication On pourrait montrer sans trop de difficulté que cette définition de la tangente n'est qu'un cas particulier de la définition de la tangente vue dans le chapitre « Courbes paramétrées ». Précisément, si F est la courbe paramétrée régulière $x \longmapsto \big(x, f(x)\big)$ dont le support est exactement le graphe de f, alors la droite passant par $F(a) = \big(a, f(a)\big)$ dirigée par $F'(a) = \big(1, f'(a)\big)$ n'est autre que la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Sans surprise, on représente les tangentes au moyen d'une flèche à double sens comme celle-ci dirigée selon la tangente : $\longleftrightarrow$.

Exemple Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est dérivable en a et son nombre dérivé en a est na^{n-1}.

En effet Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$: $\dfrac{x^n - a^n}{x-a} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-k-1}$. La limite $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$ existe alors clairement et précisément : $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}$ comme annoncé.

Exemple La fonction valeur absolue $|\cdot|$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^\times$, mais pas en 0.

En effet

- Sur $\mathbb{R}_+^\times$, $|\cdot|$ coïncide avec la fonction $x \longmapsto x$ dont nous venons de voir qu'elle est dérivable partout, donc $|\cdot|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$. La situation est la même sur $\mathbb{R}_-^\times$, au signe près.
- En revanche, pour tout $x \in \mathbb{R}^\times$: $\dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
  Ainsi $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$, donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$ n'existe pas et comme voulu $|\cdot|$ n'est pas dérivable en 0.

1.1.2 Dérivabilité à gauche/à droite en un point

Définition (Dérivabilité à gauche/à droite en un point) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$.

- On dit que f est *dérivable à gauche en a* si $f_{|I \cap\,]-\infty, a]}$ est dérivable en a ; cela revient à dire que $\displaystyle\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à gauche de f en a* et notée $f'_g(a)$.
- On dit que f est *dérivable à droite en a* si $f_{|I \cap [a, \infty[}$ est dérivable en a ; cela revient à dire que $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie. Cette limite est alors appelée le *nombre dérivé à droite de f en a* et notée $f'_d(a)$.

Définition (Demi-tangente à gauche/à droite) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in I$.

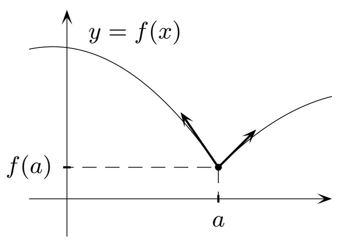
- Si f est dérivable à gauche en a, la demi-droite d'équation $y = f(a) + f'_g(a)(x-a)$ et $x \leqslant a$ est appelée la *demi-tangente à gauche de f en a*.
- Si f est dérivable à droite en a, la droite d'équation $y = f(a) + f'_g(a)(x-a)$ et $x \geqslant a$ est appelée la *demi-tangente à droite de f en a*.

Remarque La dérivabilité à gauche n'étant qu'un cas particulier de la dérivabilité en général — on restreint l'intervalle d'étude — la dérivabilité à gauche implique la continuité à gauche ; de même à droite.

Théorème Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $a \in \mathring{I}$.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a avec de plus $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Explication



f est dérivable à gauche et à droite en a, mais pas en a.

Démonstration

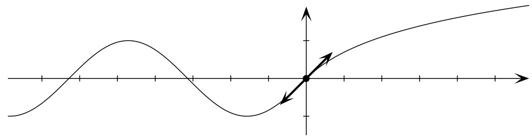
$$\begin{aligned}
f \text{ est dérivable en } a \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe et est finie} \\
&\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to a^-} \frac{f(a)-f(a)}{x-a} \text{ et } \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existent, sont finies et égales} \\
&\Longleftrightarrow \quad f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \text{ et } f'_g(a) = f'_d(a).
\end{aligned}$$

■

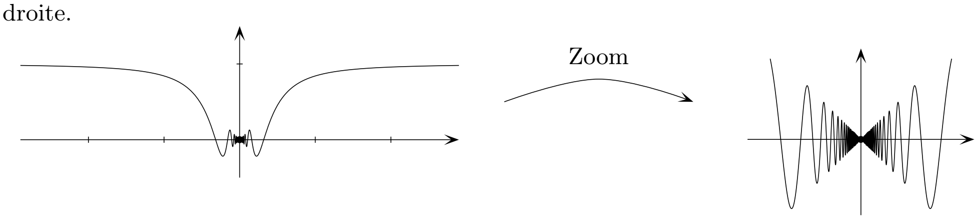
Exemple Comme nous l'avons vu — sans le dire ainsi — la fonction valeur absolue $|\cdot|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, mais comme $f'_g(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$, elle n'est pas dérivable en 0.

Exemple Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin x & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Alors $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En effet Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$.
En 0, on a $f'_g(0) = f'_d(0) = 1$. Via le théorème précédent, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.



✖✖✖ **Attention !** Une fonction peut n'être ni dérivable à gauche ni dérivable à droite en un point. C'est le cas de la fonction $f : x \longmapsto x \sin \dfrac{1}{x}$ en 0 prolongée par continuité en 0 via $f(0) = 0$, car $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, ni à gauche ni à droite.



1.1.3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition (Dérivabilité sur un intervalle) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *dérivable* sur I si f est dérivable en tout point de I. L'application $x \longmapsto f'(x)$ est appelée la *dérivée de* f.

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple Les fonctions usuelles — exp, ln, puissances, fonctions circulaires et hyperboliques et leurs inverses — sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs. Pour les fonctions de base — exp, ln, sin et cos — nous l'admettons. Pour les autres, qui sont construites à partir de celles-ci, cela découle des résultats du paragraphe suivant.

1.2 Opérations sur la dérivabilité

Théorème (Opérations algébriques et dérivabilité) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$. On suppose f et g dérivables en a.

(i) **Somme :** $f + g$ est dérivable en a et : $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(ii) **Produit :** fg est dérivable en a et : $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(iii) **Multiplication par un scalaire :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en a et : $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

(iv) **Quotient :** Si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et : $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Bien sûr, des résultats analogues sont vrais pour la dérivabilité à gauche et à droite, et pour la dérivabilité sur un intervalle.

Démonstration Par hypothèse :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{=} g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a).$$

(i) On somme :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &\underset{x\to a}{=} f(x)+g(x) \underset{x\to a}{=} \Big(f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)\Big)+\Big(g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)\Big)\\ &\underset{x\to a}{=} (f+g)(a)+\Big(f'(a)+g'(a)\Big)(x-a)+o(x-a).\end{aligned}$$

Ceci montre bien que $f+g$ est dérivable en a et que $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$.

(ii) On fait le produit :

$$\begin{aligned}fg(x) &\underset{x\to a}{=} f(x)g(x) \underset{x\to a}{=} \Big(f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a)\Big)\Big(g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)\Big)\\ &\underset{x\to a}{=} (fg)(a)+\Big(f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\Big)(x-a)+\overbrace{f'(a)g'(a)(x-a)^2}^{o(x-a)}\\ &\qquad +o(x-a)\overbrace{\Big(f(a)+g(a)+f'(a)(x-a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)\Big)}^{O(1)}\\ &\underset{x\to a}{=} (fg)(a)+\Big(f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\Big)(x-a)+o(x-a).\end{aligned}$$

Ceci montre bien que fg est dérivable en a et que $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

(iii) La multiplication par un scalaire n'est qu'un cas particulier de l'assertion (ii).

(iv) On suppose que $g(a)\neq 0$. Montrons que $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et que $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a)=-\dfrac{g'(a)}{g(a)^2}$. Via l'assertion (ii), cela montrera complètement l'assertion (iv). Il s'agit d'utiliser la formule $\dfrac{1}{1+u}\underset{u\to 0}{=}1-u+o(u)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)} &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)+g'(a)(x-a)+o(x-a)} \underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\times\frac{1}{1+\dfrac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)}\\ &\underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}\times\left(1-\frac{g'(a)}{g(a)}(x-a)+o(x-a)\right) \underset{x\to a}{=} \frac{1}{g(a)}-\frac{g'(a)}{g(a)^2}(x-a)+o(x-a).\end{aligned}$$

Ceci montre bien que $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et que $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a)=-\dfrac{g'(a)}{g(a)^2}$. ■

Théorème (Composition et dérivabilité) Soient $f: I\longrightarrow J$ et $g: J\longrightarrow\mathbb{R}$ deux applications.

- **En un point :** Soit $a\in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a et :

$$(g\circ f)'(a)=f'(a)g'\big(f(a)\big).$$

- **Sur un intervalle :** Si f est dérivable sur I et g dérivable sur J, alors $g\circ f$ est dérivable sur I.

✖✖✖ **Attention !** Vous méditerez cet exemple : la dérivée de la $x\longmapsto\sin(2x)$ n'est pas $x\longmapsto\sin'(2x)$, c'est $x\longmapsto 2\sin'(2x)$.

Démonstration Il suffit de démontrer le théorème en un point $a\in I$.
Puisque g est dérivable en $f(a)$, on a : $\displaystyle\lim_{y\to f(a)}\frac{g(y)-g\big(f(a)\big)}{y-f(a)}=g'\big(f(a)\big)$. Or puisque f est dérivable en a, f est continue en a, donc $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Par composition on obtient ainsi : $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(a)\big)}{f(x)-f(a)}=g'\big(f(a)\big)$. Multipliant finalement par la limite $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$, nous en déduisons comme voulu que $g\circ f$ est dérivable en a, et précisément que : $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(a)\big)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(a)\big)}{f(x)-f(a)}=f'(a)g'\big(f(a)\big)$. ■

✎✎✎ **En pratique** Cette remarque est très importante : pour montrer la dérivabilité d'une composée $g\circ f$, ne vous contentez pas d'un vague « C'est dérivable par composition ». Mettez en évidence les intervalles I et J et suivez scrupuleusement l'énoncé du résultat ci-dessus. Le principe est le même que pour l'étude de la continuité.

Exemple La fonction $x \longmapsto \sqrt{x\text{Arcsin}\, x}$ est dérivable sur $]-1,1[\, \setminus \{0\}$.

En effet

- La fonction $x \longmapsto \text{Arcsin}\, x$ est dérivable sur $]-1,1[$, et c'est aussi le cas de la fonction $x \longmapsto x$; par produit, $x \longmapsto x\text{Arcsin}\, x$ est dérivable sur $]-1,1[$. Or un tableau de signes montre aisément que cette fonction est positive sur son ensemble de définition $[-1,1]$, nulle seulement en 0.
- La fonction $x \longmapsto x\text{Arcsin}\, x$ est donc dérivable sur $]-1,1[\, \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$; or la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$; par composition, $x \longmapsto \sqrt{x\text{Arcsin}\, x}$ est dérivable sur $]-1,1[\, \setminus \{0\}$.

Le théorème suivant a déjà été énoncé dans le chapitre sur les fonctions usuelles, où il était admis. C'est grâce à lui que nous avons pu justifier la dérivabilité des fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente notamment, et calculer leurs dérivées. Vous savez déjà l'utiliser.

Théorème (Dérivabilité d'une fonction réciproque) Soit $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ bijective de I sur $f(I)$, telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration Soit $b \in f(I)$. Pour commencer, le théorème de la bijection affirme la continuité de f^{-1} sur $f(I)$. On a donc $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b)$.

Or f est dérivable en $f^{-1}(b) \in I$, donc $\lim\limits_{x \to f^{-1}(b)} \dfrac{f(x) - f\big(f^{-1}(b)\big)}{x - f^{-1}(b)} = f'\big(f^{-1}(b)\big)$, puis en passant à l'inverse — ce qui est possible car par hypothèse f' ne s'annule pas — $\lim\limits_{x \to f^{-1}(b)} \dfrac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - f\big(f^{-1}(b)\big)} = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}$.

Composant l'une avec l'autre les deux limites ainsi obtenues, nous pouvons affirmer que :

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f\big(f^{-1}(y)\big) - f\big(f^{-1}(b)\big)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)}.$$

C'est le résultat voulu. ■

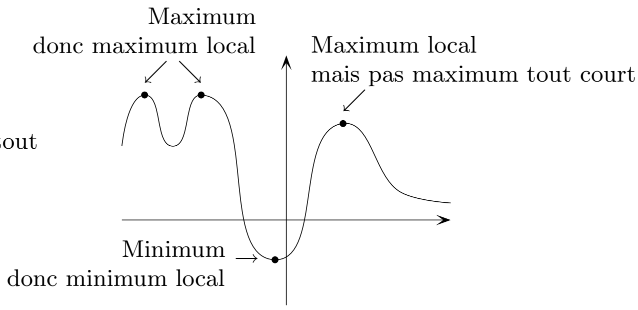
2 Les grands théorèmes

2.1 Théorème de Rolle

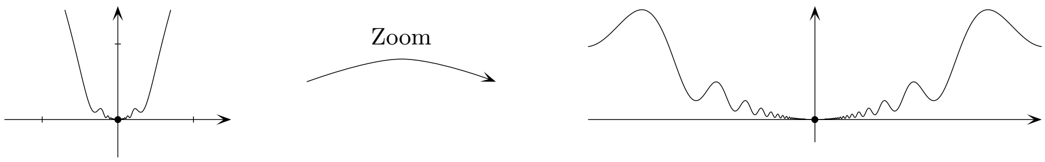
Définition (Extrêmum local) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- On dit que f possède un *maximum local en a* si f est majorée par $f(a)$ au voisinage de a.
- On dit que f possède un *minimum local en a* si f est minorée par $f(a)$ au voisinage de a.

✌ ✌ ✌ **Explication**
Un maximum local n'est pas forcément un maximum de la fonction sur tout son domaine de définition.

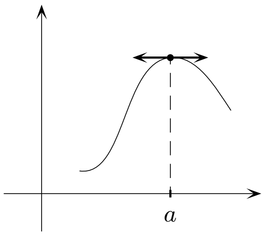


✖✖✖ **Attention !** On peut avoir un minimum local en a sans pouvoir affirmer pour autant que f est décroissante à gauche et croissante à droite au voisinage de a. C'est le cas de la fonction $x \longmapsto x^2 + 2x^2 \sin^2 \dfrac{1}{x}$ prolongée par 0 en 0, représentée ci-contre.

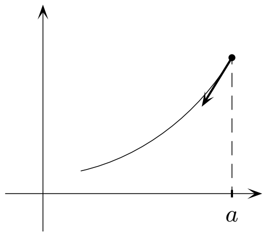


Le théorème suivant, quoique simple à démontrer, est **LE** théorème dont tous les autres vont découler dans cette partie.

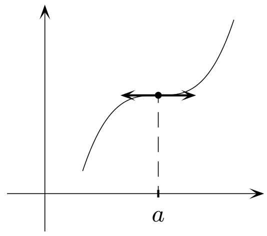
Théorème (Extrêmum local et dérivabilité) Soient $f :\longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que f est dérivable en a et que f possède un extrêmum local en a. Alors $f'(a) = 0$.



Situation standard du théorème (cas d'un maximum).



Ici a est une borne de I et le théorème est faux.



La réciproque du théorème est fausse.

✖✖✖ **Attention !**

- Ce théorème est vrai parce qu'on suppose que $a \in \overset{\circ}{I}$, i.e. que a n'est pas une borne de I.
- La réciproque est fausse : on peut avoir $f'(a) = 0$ sans avoir aucun extrêmum local en a. Pensez par exemple à la fonction $x \longmapsto x^3$ en 0.

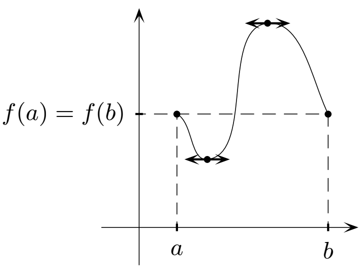
Démonstration Démontrons le théorème dans le cas d'un maximum local en a. Puisque a n'est pas une borne de I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subseteq I$.
Puisque f possède un maximum local en a, alors $f(x) \leqslant f(a)$ sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ (le même ε que ci-dessus, quitte à le rapetisser un peu éventuellement). Par conséquent :

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a], \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in [a, a+\varepsilon], \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0.$$

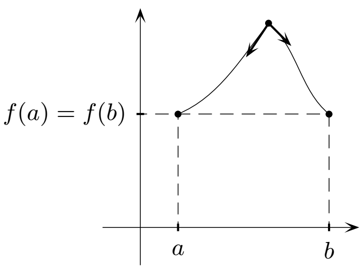
Mais f étant dérivable en a, elle l'est à gauche et à droite en a et on peut donc faire tendre x vers a par la gauche **et** par la droite dans ces inégalités. Cela donne $f'_g(a) \geqslant 0$ et $f'_d(a) \leqslant 0$. Or $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$. Par conséquent $f'(a)$ est à la fois positif et négatif, donc $f'(a) = 0$. ■

Théorème (Théorème de Rolle) Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

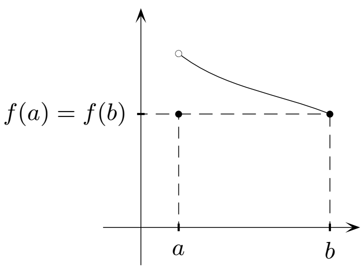
✌✌✌ **Explication** Toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont importantes, c'est ce que montrent assez clairement les figures ci-dessous.



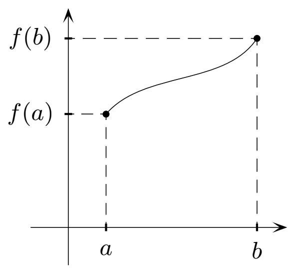
Situation standard du théorème de Rolle.



Si on enlève la dérivabilité, même en un point, rien ne va plus.



Si on enlève la continuité, même sur les bords, c'est encore pire.



Si $f(a) \neq f(b)$, c'est toujours la cata.

✖✖✖ **Attention !** Le théorème de Rolle est un théorème d'**existence**, certainement pas d'unicité. La première figure ci-dessus le montre clairement.

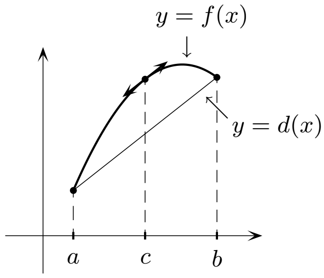
Démonstration Puisque f est continue sur le segment $[a, b]$, f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. Notons $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$

- Si $f(a) = f(b) \neq M$, alors comme f atteint ses bornes, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Parce que ce point c est dans l'**intérieur** de $[a, b]$, nous pouvons utiliser le théorème précédent et affirmer que $f'(c) = 0$.
- Si $f(a) = f(b) \neq m$, on procède de la même manière.
- Le cas restant est le cas dans lequel $f(a) = f(b) = m = M$. Or l'égalité $m = M$ implique la constance de f sur tout $[a, b]$, par définition de m et M. La constance de f sur entraînant la nullité de sa dérivée partout, nous avons ce que nous voulons. ■

2.2 Egalité et inégalité des accroissements finis

Théorème (Théorème ou égalité des accroissements finis) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. L'interprétation géométrique de ce résultat est présentée ci-dessous.

✖✖✖ **Attention !**
Conséquence du théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis est un théorème d'**existence**, certainement pas d'unicité.



Démonstration
Notons d l'application $x \longmapsto \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ définie et dérivable sur $[a,b]$. La figure ci-contre donne une interprétation graphique de d. Notons en outre φ l'application $f-d$. Alors φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ comme somme. Et par ailleurs $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ car :

$$\varphi(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) - f(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(a).$$

Le théorème de Rolle montre aussitôt l'existence d'un certain $c \in\,]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Cette égalité se réécrit aisément sous la forme voulue : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$. La pente en c est égale au taux d'accroissement de f entre a et b. ■

Théorème (Inégalité des accroissements finis) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

(i) S'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in\,]a,b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors : $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$.

(ii) Si $|f'|$ est majorée par un certain $K \in \mathbb{R}_+$ sur $]a,b[$, alors : $\big|f(b)-f(a)\big| \leqslant K|b-a|$.

Démonstration Via le théorème des accroissements finis, il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

(i) Par hypothèse, $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, donc $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$. Le résultat est alors immédiat puisque $a<b$.

(ii) découle de (i) si on pose $m=-K$ et $M=K$. ■

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de l'assertion (ii) de l'inégalité des accroissements finis.

Corollaire (Dérivée bornée et lipschitzienneté) Soit $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$. Si $|f'|$ est majorée par un certain $K \in \mathbb{R}_+$ sur I, alors f est K-lipschitzienne sur I.

✎✎✎ **En pratique** Quand vous voulez démontrer une inégalité qui n'a pas l'air tout à fait triviale, l'une des techniques auxquelles vous devez penser est l'utilisation de l'inégalité des accroissements finis. Deux exemples sont donnés ci-dessous.

Exemple $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x|$.

En effet La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée cosinus est majorée en valeur absolue par 1. Par conséquent sinus est 1-lipschitzienne, donc en particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| = |\sin x - \sin 0| \leqslant |x-0| = |x|$.

Exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$.

En effet

- Soit $k \in \mathbb{N}^\times$. Commençons par appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln sur $[k,k+1]$. La fonction logarithme est continue sur $[k,k+1]$ et dérivable sur $]k,k+1[$, et sa dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est majorée par $\dfrac{1}{k}$ et minorée par $\dfrac{1}{k+1}$ sur $]k,k+1[$. Par conséquent : $\dfrac{1}{k+1}\big((k+1)-k\big) \leqslant \ln(k+1)-\ln k \leqslant \dfrac{1}{k}\big((k+1)-k\big)$, ce qu'on réécrit aisément de la façon suivante : $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1)-\ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Sommons les inégalités précédentes pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. On obtient :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \big(\ln(k+1) - \ln k\big) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$
puis après simplification télescopique et changement d'indice : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Permutons maintenant l'ordre de ces inégalités : $\displaystyle\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n + 1$, puis divisons par $\ln n$ et faisons tendre n vers ∞. On montre ainsi, comme voulu, que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1$, i.e. que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln n$. ■

2.3 Constance, monotonie et dérivabilité

Il s'agit de justifier dans cette partie l'idée bien connue selon laquelle le signe d'une dérivée est un indicateur de monotonie ou de constance.

Théorème (Caractérisation des fonctions constantes et monotones) Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$.

(i) f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

(ii) f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. négative) ou nulle sur I.

(iii) f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. négative) ou nulle sur I et $\Big\{x \in I / \quad f'(x) = 0\Big\}$ ne contient aucun intervalle non vide non réduit à un point.

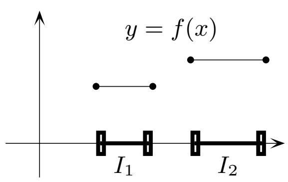
En particulier, si f' est strictement positive (resp. négative) sur I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

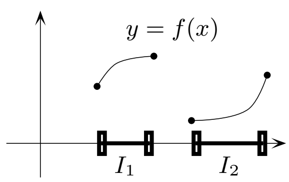
✌✌✌ **Explication** Ces résultats n'ont rien de magique, ils ont une interprétation géométrique très simple. Nous savons que si f est dérivable en a, la tangente de f en a a pour coefficient directeur $f'(a)$. Or les tangentes sont un révélateur naturel de la croissance du graphe de f : si f est croissante (resp. décroissante) au voisinage de a, f a une tangente en a de coefficient directeur positif (resp. négatif).
Vous méditerez cependant avec intérêt le deuxième point du paragraphe **Attention !** ci-dessous, qui montre les limites de ce petit raisonnement avec les mains.

✖✖✖ **Attention !**

- L'hypothèse selon laquelle I est un intervalle est absolument essentielle dans ce théorème. Si I est une réunion d'intervalles disjoints, le théorème est faux, comme l'illustrent les figures ci-dessous.

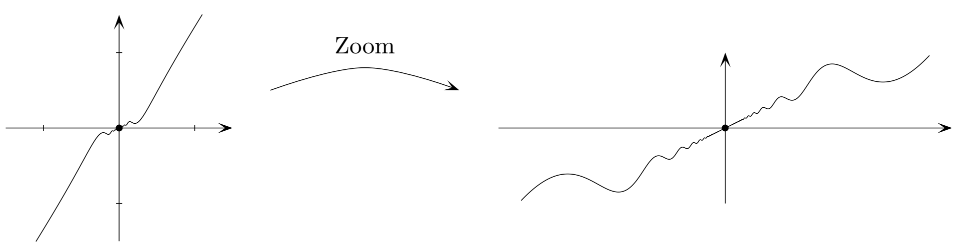
f est constante sur I_1 et sur I_2, donc $f' = 0$ sur I_1 et sur I_2, mais f n'est pas constante sur $I_1 \cup I_2$.





f est croissante sur I_1 et sur I_2, donc $f' \geqslant$ sur I_1 et sur I_2, mais f n'est pas croissante sur $I_1 \cup I_2$.

- On peut avoir $f'(a) > 0$ pour un certain $a \in I$ sans pouvoir affirmer que f est strictement croissante au voisinage de a. Par exemple, soit f la fonction $x \longmapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2}$ prolongée par 0 en 0. Bien sûr f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et en revenant au taux d'accroissement de f, on montre aisément que $f'(0) = \dfrac{1}{2} > 0$. Or par ailleurs : $\forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}$, ce qui montre que f' change de signe régulièrement au voisinage de 0, donc change de sens de variation régulièrement au voisinage de 0. En deux mots, le $x \sin \dfrac{1}{x}$ est petit au voisinage de 0 alors que le $\cos \dfrac{1}{x}$ prend une infinité de fois les valeurs 1 et -1. Comme on ajoute $\dfrac{1}{2}$, f' prend une infinité de fois au voisinage de 0 des valeurs proches de $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}$.



Démonstration

(i) et (ii) Supposons d'abord f constante sur I et donnons-nous $a \in I$. Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. A la limite en a, on obtient donc $f'(a) = 0$.

Réciproquement, supposons f' nulle sur I et donnons-nous $x, y \in I$, $x < y$. Alors f est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, donc via le théorème des accroissements finis, il existe un certain $c \in]x, y[$ tel que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c) = 0$. On en déduit comme voulu que $f(x) = f(y)$. Cela montre bien que f est constante sur I.

Pour démontrer l'assertion (ii), changez ci-dessus tous les symboles « $=$ » en des « $\leqslant$ » ou en des « $\geqslant$ » (le symbole d'égalité dans le théorème des accroissements finis doit, lui, être conservé).

(iii) Notons $\mathcal{Z} = \Big\{x \in I / \quad f'(x) = 0\Big\}$.

Supposons d'abord que f est strictement croissante sur I. Via (ii), f' est positive ou nulle sur I car f' est croissante sur I.
Montrons alors que $\mathcal{Z}$ ne contient aucun intervalle non vide non réduit à un point. Soient donc $a, b \in I$ tels que $[a, b] \subseteq \mathcal{Z}$. Nous devons montrer que $a = b$. Or via (i), puisque f' est nulle sur $[a, b]$, f est constante sur $[a, b]$. En particulier $f(a) = f(b)$. La stricte monotonie de f entraîne aussitôt l'égalité $a = b$. C'est le résultat voulu.

Réciproquement, supposons que f' est positive ou nulle sur I et que $\mathcal{Z}$ ne contient aucun intervalle non vide non réduit à un point. Déjà, f est croissante via (ii), puisque f' est positive ou nulle sur I.
Soient $x, y \in I$, $x < y$. Nous savons donc que $f(x) \leqslant f(y)$. Si $f(x) = f(y)$, la croissance de f montre que f est constante sur $[x, y]$, puis que f' est nulle sur $[x, y]$ via (i), et enfin que $\mathcal{Z}$ contient l'intervalle $[x, y]$ non vide non réduit à un point — ce qui est faux. Par conséquent $f(x) \neq f(y)$, et donc $f(x) < f(y)$.

Le cas où f est décroissante se traite de la même manière, ou bien s'obtient à partir du cas en précédent en multipliant f par -1. ■

Remarque Le chapitre de début d'année sur les équations différentielles reposait en grande partie sur l'assertion (i) du théorème précédent. La voilà démontrée.

Exemple $\forall x \in [-1, 1], \quad \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2}$.

En effet La fonction $f : x \longmapsto \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x$ est dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée identiquement nulle. Ceci montre que f est constante sur $]-1, 1[$, égale par exemple à sa valeur en 0 qui est $\dfrac{\pi}{2}$. La continuité de f en ± 1 permet d'affirmer que f est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$ sur tout l'intervalle $[-1, 1]$ comme voulu.

2.4 Continuité d'une dérivée

Théorème (Continuité d'une dérivée) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b]$.

- Si $\lim\limits_{a^+} f'$ existe (dans $\bar{\mathbb{R}}$), alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe aussi et ces deux limites sont égales.
- En particulier, si $\lim\limits_{a^+} f'$ existe <u>**et est finie**</u>, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.

On dispose d'un résultat analogue pour prolonger par dérivabilité à gauche, de même qu'en un même point des deux côtés.

✖✖✖ <u>**Attention !**</u> La réciproque de ce théorème est fausse au sens suivant : la dérivabilité de f sur tout $[a, b]$ n'implique pas l'existence de $\lim\limits_{a^+} f'$. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ prolongée par 0 en 0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier et $f'(0) = 0$, mais $\lim\limits_{0} f$ n'existe pas car : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^\times, \quad f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$.

Démonstration On suppose que $\lim_{a} f'$ existe et on note $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ cette limite.

- **Cas où** $\ell \in \mathbb{R}$ **:** Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]a, a+\alpha], \quad \left|f'(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
  Soit $x \in]a, a+\alpha]$. Comme f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$, le théorème des accroissements finis affirme que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$ pour un certain $c \in]a, x[$. On a donc : $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| = \left|f'(c) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
  Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons donc trouvé un $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]a, a+\alpha], \quad \left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$. C'est dire que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut ℓ. Cela montre bien que f est dérivable en a.
  Finalement, $\lim_{a^+} f = \ell = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$, et donc f' est continue en a.

- **Cas où** $\ell = \infty$ **:** Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]a, a+\alpha], \quad f'(x) \geqslant A$.
  Soit $x \in]a, a+\alpha]$. Comme f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$, le théorème des accroissements finis affirme que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$ pour un certain $c \in]a, x[$. On a donc : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) \geqslant A$.
  Pour tout $A \in \mathbb{R}$, nous avons donc trouvé un $\alpha > 0$ tel que : $\forall x \in]a, a+\alpha], \quad \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant A$. C'est dire que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut ∞. Même chose si $\ell = -\infty$. ■

Exemple La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

En effet

- En réalité, on n'a pas besoin d'utiliser le théorème précédent pour démontrer la non-dérivabilité de la racine carrée en 0. Il suffirait simplement de revenir au taux d'accroissement de $\sqrt{\cdot}$ en 0.
- Cela dit, vous êtes parfois tentés de justifier la non dérivabilité de $\sqrt{\cdot}$ en 0 en avançant l'idée que la fonction $\sqrt{\cdot}' = \left(x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ n'a pas de limite finie en 0. Il se trouve que ce raisonnement est correct, mais il requiert justement le théorème de prolongement par dérivabilité précédent. Précisément : $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$, et $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\cdot}'(x) = \infty$; par conséquent $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \infty$, ce qui justifie bien, en effet, la non-dérivabilité de la racine carrée en 0. Mais notez bien que la continuité de la racine en 0 est une hypothèse nécessaire dans ce théorème.

2.5 Théorème des accroissements finis et suites récurrentes

Nous avons déjà vu de nombreux exemples de suites définies par une relation de récurrence de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Grâce à des théorèmes comme le théorème de la limite monotone ou la caractérisation séquentielle de la limite, nous avons appris à tordre le cou méthodiquement à de telles suites. Nous allons enrichir nos techniques dans ce domaine en utilisant à présent l'inégalité des accroissements finis.

Comme nous le savons bien, une suite définie par une relation de récurrence de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ » converge souvent vers un point fixe de f. Pour les mathématiques appliquées, cette remarque vaut de l'or. En effet, si on a besoin — et cela arrive plus qu'on le croit — d'une approximation d'un point fixe ℓ d'une fonction f, il est tentant d'introduire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'on peut montrer que $\lim_{n \to \infty} u_n = \ell$, alors on pourra approximer ℓ par u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$; l'approximation sera d'autant plus précise que n est grand.

Ces remarques ne résolvent malheureusement pas tous nos problèmes : si on doit calculer $u_{10^{10^{10}}}$ pour obtenir une approximation de ℓ à 10^{-2} près, on n'est pas rendu. On préfèrerait obtenir un grand nombre de décimales de ℓ en ayant seulement à calculer u_{10} par exemple. Se pose ainsi l'épineux problème de la *vitesse de convergence* des suites. Si la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *rapidement* vers 0, par exemple si $u_n - \ell \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{2^n}$ (vitesse *exponentielle* ou *géométrique*), on aura de bonnes approximations de ℓ sans avoir à fournir trop d'efforts ; si au contraire $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *lentement* vers 0, par exemple si $u_n - \ell \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln n}$, il faudra calculer u_N pour un N assez grand pour avoir une bonne approximation de ℓ.

Le théorème suivant donne une condition suffisante de convergence exponentielle, donc de convergence rapide.

Théorème (Utilisation de l'inégalité des accroissements finis pour l'étude des suites récurrentes) Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telle que $f(I) \subseteq I$. On suppose que f possède un point fixe ℓ dans I et que $|f'|$ est majorée sur I par un certain réel η avec $0 \leqslant \eta < 1$.
Soit en outre $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 \in I$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant \eta^n |u_0 - \ell|$. En particulier $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ et la convergence est exponentielle.

✎✎✎ **En pratique** On n'acceptera jamais que vous utilisiez ce résultat sans le rejustifier au cas par cas ; ce résultat est avant tout une technique. Il figure dans ce cours comme un théorème uniquement par souci de clarté.

Démonstration

- Un corollaire de l'inégalité des accroissements finis nous permet d'affirmer que f est η-lipschitzienne sur I. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc : $\big|f(u_n) - f(\ell)\big| \leqslant \eta|u_n - \ell|$, ce qui s'écrit aussi : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \eta|u_n - \ell|$ via les hypothèses du théorème.
- Une récurrence que vous rédigerez seuls montre alors, comme voulu, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant \eta^n |u_0 - \ell|$.
- L'hypothèse **<u>essentielle</u>** selon laquelle $0 \leqslant \eta < 1$ montre aussitôt, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \eta^n = 0$, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ ; c'est le théorème des gendarmes qui le dit. ∎

Exemple Le polynôme $X^3 + X - 1$ possède une unique racine réelle égale à 0,68 à 10^{-2} près.

En effet

- La fonction $x \longmapsto x^3 + x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $x \longmapsto 3x^2 + 1$ strictement positive. Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et comme $\lim\limits_{x\to\infty} (x^3 + x - 1) = \infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 + x - 1) = -\infty$, la continuité de f montre que f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On remarque par ailleurs que $0^3 + 0 - 1 = -1 < 0$ et que $1^3 + 1 - 1 = 1 > 0$.
  En particulier, comme annoncé, le polynôme $X^3 + X - 1$ possède une unique racine réelle $\rho \in \,]0, 1[$. On a :
  $$\rho^3 + \rho - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(1+\rho^2) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1+\rho^2} = \rho.$$
  Bref, ρ est **LE** point fixe de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.
- On définit alors la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\rho_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \rho_{n+1} = f(\rho_n) = \dfrac{1}{1+\rho_n^2}$.
  On s'attend, si tout se passe bien, à avoir $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \rho$. Pour le montrer, nous allons appliquer à f l'inégalité des accroissements finis.
- Rationnelle, f est ici dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Tâchons de majorer $|f'|$. Pour cela, dérivons de nouveau : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. On en déduit aussitôt le tableau des variations de f' :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		∞
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	0

  qui montre que $|f'|$ est majorée par $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $\dfrac{3\sqrt{3}}{8} \leqslant 0,7$, nous pouvons en déduire que f est (0,7)-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
- Du coup, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|\rho_{n+1} - \rho| = \big|f(\rho_n) - f(\rho)\big| \leqslant 0,7|u_n - \rho|$.
  Par récurrence, ce résultat devient aussitôt : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |\rho_n - \rho| \leqslant (0,7)^n|\rho_0 - \rho| = (0,7)^n|\rho| \leqslant (0,7)^n$.
  En particulier, le théorème des gendarmes affirme la convergence (exponentielle) de $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ρ, comme voulu.
- Nous pouvons donc utiliser $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour calculer une valeur approchée de ρ à 10^{-2} près. Mais combien de termes de la suite devons-nous calculer ? Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
  $$(0,7)^n \leqslant 10^{-2} \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln 0,01}{\ln 0,7} \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant 13.$$
  On obtient donc une valeur approchée de ρ à 10^{-2} près en calculant u_{13}. On obtient $u_{13} \approx 0,68$. En réalité, on constate en faisant le calcul que u_n vaut $0,68$ au bout de trois ou quatre termes, mais ce qui compte, ce n'est pas ce qu'on **constate**, mais ce qu'on **démontre**. Nos calculs n'ont peut-être pas été d'une finesse à toute épreuve, mais en tout cas ils sont corrects.

☃ ☃ ☃ **Explication** La technique d'étude des suites définies par une relation de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ » que nous venons d'étudier mérite d'être d'être comparée aux techniques que nous utilisions jusqu'ici. Par rapport au théorème de la limite monotone, le théorème des accroissements finis est intéressant pour deux raisons au moins.

1) Comme nous l'avons déjà remarqué, le théorème des accroissements finis nous fournit, quand il s'applique, une convergence exponentielle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étudiée.

2) Le théorème de la limite monotone requiert l'étude de la monotonie de la suite étudiée. On sait qu'il faut distinguer le comportement de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ de celui de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque f est décroissante. Avec le théorème des accroissements finis, étudier la monotonie ne présente aucun intérêt si on souhaite seulement justifier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cela dit, l'inégalité des accroissements finis ne peut être appliquée avec succès que si la fonction $|f'|$ est majorée par un réel η tel que $0 \leqslant \eta < 1$. Ceci est assez contraignant.

3 Dérivées successives

3.1 Définitions

Définition (Dérivées successives) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On définit les dérivées successives de f, **si** elles existent, au moyen d'une récurrence.

- On commence par poser $f^{(0)} = f$.
- Soit alors $k \in \mathbb{N}$. Si on a réussi à définir $f^{(k)}$ sur I au cours des étapes précédentes, et si $f^{(k)}$ est dérivable sur I, on pose $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(k)}$ ainsi (éventuellement) définie est appelée la *dérivée $k^{\text{ème}}$ de f* ; on la note parfois $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}\square^k}$ quand le symbole utilisé pour désigner la variable de f est $\square$. Si elle existe, on dit que f est *k fois dérivable sur I*.
On note généralement f, f', f'' et f''' plutôt que $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$ respectivement.

Définition (Fonction de classe $\mathcal{C}^k$) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dit que f est *de classe $\mathcal{C}^k$ sur I* si f est k fois dérivable sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.

L'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I est noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

- On dit que f est *de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I* si f est dérivable autant de fois qu'on le veut sur I.

L'ensemble des de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I est noté $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

☃ ☃ ☃ **Explication** Ne confondez surtout pas « de classe $\mathcal{C}^k$ » avec « k fois dérivable ».

$\ldots \Longrightarrow$ De classe $\mathcal{C}^3$ $\Longrightarrow$ Trois fois dérivable $\Longrightarrow$ De classe $\mathcal{C}^2$ $\Longrightarrow$ Deux fois dérivable $\Longrightarrow$ De classe $\mathcal{C}^1$ $\Longrightarrow$ Dérivable $\Longrightarrow \ldots$

En outre, « de classe $\mathcal{C}^0$ » = « continue », de sorte que $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Exemple La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, égale à toutes ses dérivées successives.

Exemple Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^\times$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée $k^{\text{ème}}$ est la fonction $x \longmapsto \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$.

En effet On raisonne par récurrence sur k. La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est 0 fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ de dérivée $0^{\text{ème}}$ elle-même.

Soit alors $k \in \mathbb{N}$. On suppose $x \longmapsto x^\alpha$ k fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ de dérivée $k^{\text{ème}}$ $x \longmapsto \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$. Or $x \longmapsto (\alpha-k)\ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et $x \longmapsto e^x$ l'est sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \longmapsto e^{(\alpha-k)\ln x} = x^{\alpha-k}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$, de dérivée $x \longmapsto (\alpha-k)x^{\alpha-k-1}$. Finalement la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est $(k+1)$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$, de dérivée $(k+1)^{\text{ème}}$ la fonction $x \longmapsto \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)x^{\alpha-k-1}$, comme voulu.

L'exemple suivant est un grand classique. A savoir refaire !

Exemple Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. Si f s'annule en au moins $(k+1)$ points distincts, alors $f^{(k)}$ s'annule en au moins un point.

En effet Montrons par récurrence que pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $f^{(i)}$ s'annule en au moins $(k-i+1)$ points distincts. Pour $i = k$, on a tout simplement l'énoncé du théorème souhaité.

- **Initialisation :** L'assertion pour $i = 0$ n'est autre que l'hypothèse du théorème.
- **Hérédité :** Soit $i \in [\![0, k-1]\!]$. On suppose que $f^{(i)}$ s'annule en au moins $(k-i+1)$ points distincts $x_1, x_2, \ldots, x_{k-i+1}$ rangés dans l'ordre $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-i+1}$.
  Pour tout $j \in [\![1, k-i]\!]$, $f^{(i)}$ est continue sur $[x_j, x_{j+1}]$, dérivable sur $]x_j, x_{j+1}[$ et $f^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_{j+1}) = 0$. Le théorème de Rolle affirme donc l'existence d'un zéro x'_j de $f^{(i+1)}$ compris strictement entre x_i et x_{i+1}. Nous disposons ainsi de $(k-i) = \big(k-(i+1)+1\big)$ zéros de $f^{(i+1)}$; ceux que nous avons trouvé sont deux à deux distincts car $x'_1 < x_2 < x'_2 < x_3 < \ldots < x'_{k-i} < x_{k-i}$, donc distincts, comme voulu. Notre récurrence est terminée. ■

3.2 Opérations sur les dérivées successives

Théorème (Opérations algébriques et dérivées successives) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $k \in \mathbb{N}$. On suppose f et g k fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur I.

(i) **Somme :** $f+g$ est k fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur I et : $(f+g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$.

(ii) **Produit :** fg est k fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur I et :

$$(fg)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)} \qquad \textit{(formule de Leibniz).}$$

(iii) **Multiplication par un scalaire :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est k fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur I et :

$$(\lambda f)^{(k)} = \lambda f^{(k)}.$$

(iv) **Quotient :** Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est k fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur I.

Bien sûr, des résultats analogues sont vrais quand f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Démonstration Montrons seulement les assertions (ii) et (iv).

(ii) Raisonnons par récurrence. Notre assertion au rang $k \in \mathbb{N}$ est la suivante : pour toutes fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ k fois dérivables sur I, le produit fg est k fois dérivable sur I et $(fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)}$.

- **Initialisation :** Il n'y a rien à montrer.
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose l'assertion au rang k vraie. Soient alors $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ fois dérivables sur I. Via l'assertion au rang k, fg est k fois dérivable sur I et $(fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)}$.
  Nous devons dériver encore une fois, si c'est possible.
  Or pour tout $p \in [\![0, k]\!]$, $f^{(p)}$ est $(k-p+1)$ fois dérivable sur I et $g^{(k-p)}$ est $(p+1)$ fois dérivable sur I ; comme $k-p+1 \geqslant 1$ et $p+1 \geqslant 1$, $f^{(p)}$ et $g^{(k-p)}$ sont au moins une fois dérivables sur I. Ce raisonnement montre que $(fg)^{(k)}$ est dérivable sur I. Du coup, dérivons :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(k+1)} &= \left[\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p)}\right]' = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \left(f^{(p)} g^{(k-p)}\right)' = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \left(f^{(p+1)} g^{(k-p)} + f^{(p)} g^{(k-p+1)}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p+1)} g^{(k-p)} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k-p+1)} = \sum_{q=1}^{k+1} \binom{k}{q-1} f^{(q)} g^{(k+1-q)} + \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)} \\
&= fg^{(k+1)} + \sum_{p=1}^{k} \left[\binom{k}{p-1} + \binom{k}{p}\right] f^{(p)} g^{(k+1-p)} + f^{(k+1)} g \underset{\text{de Pascal}}{\overset{\text{Formule}}{=}} fg^{(k+1)} + \sum_{p=1}^{k} \binom{k+1}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)} + f^{(k+1)} g \\
&= \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} f^{(p)} g^{(k+1-p)}.
\end{aligned}$$

C'est fini. Même chose dans le cas $\mathcal{C}^k$.

(iv) Raisonnons par récurrence. Notre assertion au rang $k \in \mathbb{N}$ est la suivante : le quotient de deux fonctions k fois dérivables sur I (la fonction au dénominateur ne s'annulant pas) est k fois dérivable sur I.

- **Initialisation :** Il n'y a rien à montrer.
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose l'assertion au rang k vraie. Soient alors $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ fois dérivables sur I, g ne s'annulant pas sur I. En particulier, f et g sont dérivables sur I, donc le quotient $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I, avec : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. Or $(f'g - fg')$ est k fois dérivable sur I, ainsi que g^2, donc via l'assertion au rang k, $\left(\frac{f}{g}\right)'$ est k fois dérivable sur I. Cela montre bien que $\frac{f}{g}$ est $(k+1)$ fois dérivable sur I comme voulu.

Même chose dans le cas $\mathcal{C}^k$. ■

Théorème (Composition et dérivées successives) Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications et $k \in \mathbb{N}$. On suppose f k fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur I et g k fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur J. Alors $g \circ f$ est k fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur I.

Démonstration Raisonnons par récurrence. Notre assertion au rang $k \in \mathbb{N}$ est la suivante : si $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont k fois dérivables respectivement sur I et J, alors $g \circ f$ est k fois dérivable sur I.

- **Initialisation :** Il n'y a rien à montrer.
- **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose l'assertion au rang k vraie. Soient alors $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ fois dérivables sur I et J respectivement. En particulier, f et g sont dérivables sur I, donc $g \circ f$ est dérivable sur I, avec : $\big(g \circ f\big)' = f' \times g' \circ f$. Or g' est k fois dérivable sur J, ainsi que f sur I, donc via l'assertion au rang k, $g' \circ f$ est k fois dérivable sur I. Cela montre bien, par produit, que $\big(g \circ f\big)'$ est k fois dérivable sur I, i.e. que $g \circ f$ est $(k+1)$ fois dérivable sur I comme voulu.

Même chose dans le cas $\mathcal{C}^k$. ■

Théorème (Fonction réciproque et dérivées successives) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bijective de I sur $f(I)$, telle que f' ne s'annule pas sur I. On suppose f k fois dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur I. Alors f^{-1} est k fois dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^k$) sur $f(I)$.

Démonstration S'inspirer des preuves précédentes. ■

4 Extension au cas des fonctions complexes

Nous allons brièvement étendre les résultats que nous avons obtenu pour les fonctions réelles aux fonctions complexes. Les notions de dérivabilité en un point, à gauche, à droite, et de dérivabilité sur un intervalle et de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sont définies dans le cas des fonctions complexes de la même façon que dans le cas des fonctions réelles — mais $|\cdot|$ désigne dans ce contexte la fonction module, et non la fonction valeur absolue. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la caractérisation de la limite d'une fonction complexe en un point à l'aide de ses parties réelle et imaginaire.

Théorème (Caractérisation de la continuité à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est dérivable en a.
- $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a.

De même les assertions :

- f est dérivable sur I.
- $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur I.

Avec les fonctions complexes, la dérivabilité implique toujours la continuité. De même les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse sur les fonctions dérivables donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel.

Les grands théorèmes sur la dérivabilité — en premier lieu, le théorème de Rolle — sont faux pour les fonctions complexes. Par exemple, la fonction $t \longmapsto e^{it}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et $e^{i0} = e^{2i\pi} = 1$, mais pourtant sa dérivée, qui est la fonction $t \longmapsto ie^{it}$, ne s'annule pas. Les théorèmes reliant la monotonie et le signe de la dérivée n'ont aucune chance d'être vrais dans le contexte des fonctions complexes, car la monotonie d'une fonction complexe n'a aucun sens.

En revanche l'**inégalité** des accroissements finis est encore vraie, bien que l'**égalité** des accroissements finis ne le soit plus.

Théorème (Inégalité des accroissements finis) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $|f'|$ est majorée par un certain $K \in \mathbb{R}_+$ sur $]a,b[$, alors : $\big|f(b) - f(a)\big| \leqslant K|b-a|$.

Démonstration Notons θ un argument de $f(b)-f(a)$, de sorte que $e^{-i\theta}\big(f(b)-f(a)\big) \in \mathbb{R}$. Introduisons ensuite l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}\big(e^{-i\theta} f(x)\big) \end{array} \right.$. Puisque $\varphi = \cos\theta\,\mathrm{Re}(f) + \sin\theta\,\mathrm{Im}(f)$, alors φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Par ailleurs : $\big|\varphi(b)-\varphi(a)\big| = \Big|\mathrm{Re}\big[e^{-i\theta}\big(f(b)-f(a)\big)\big]\Big| = \Big|e^{-i\theta}\big(f(b)-f(a)\big)\Big| = \big|f(b)-f(a)\big|$.
Et d'autre part : $|\varphi'| = \Big|\mathrm{Re}\big(e^{-i\theta} f'\big)\Big| \leqslant \big|e^{-i\theta} f'\big| = |f'| \leqslant K$.
L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction réelle φ affirme finalement que :

$$\big|\varphi(b) - \varphi(a)\big| \leqslant K|b-a|, \qquad \text{i.e. } \big|f(b) - f(a)\big| \leqslant K|b-a|. \qquad \blacksquare$$

Théorème (Caractérisation des fonctions constantes) Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$.

f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Démonstration

$$\begin{aligned} f \text{ est constante sur } I \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont dérivables sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}(f)' \text{ et } \mathrm{Im}(f)' \text{ sont nulles sur } I \\ &\Longleftrightarrow \quad f' \text{ est nulle sur } I. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$